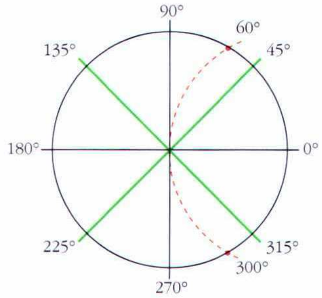
REFLEXIONA Y RESUELVE

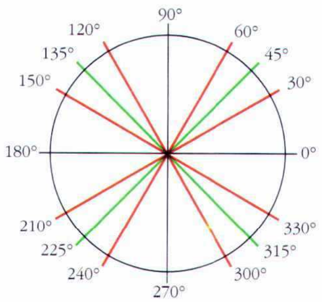
Construcción experimental de la función seno

1. Con un vaso pequeño, dibuja una circunferencia de unos 5 ó 6 cm de diámetro. Traza un sistema de ejes coordenados tomando como origen el centro de la circunferencia.

Vamos a situar una serie de ángulos. Empecemos trazando las bisectrices de los ejes, que corresponden a los ángulos de 45°, 135°, 225° y 315°.

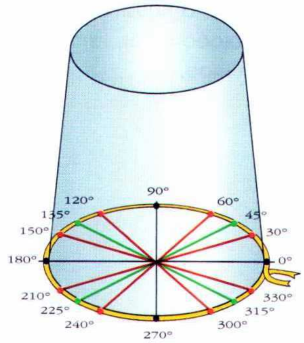


Con centro en el punto correspondiente a 0° y radio el de la circunferencia, señalamos dos puntos, que corresponden a los ángulos 60° y 300° (observa la figura de la columna izquierda). Si hacemos lo mismo con el centro en 90°, 180° y 270°, completamos la circunferencia goniométrica con los ángulos que a continuación se indican:

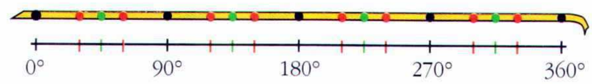


Te preguntarás cómo, a partir de esta representación sobre la circunferencia, puedes construir la función seno. Es fácil.

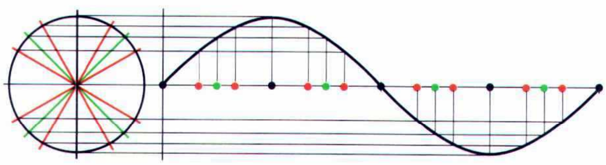
Vuelve a poner el vaso sobre la circunferencia. Enrolla a su alrededor, apoyado sobre el papel, un hilo de lana. Pinta sobre él los 16 puntos.



Al estirar el hilo queda representada la escala que hemos de tomar sobre el eje X para dibujar la función seno:

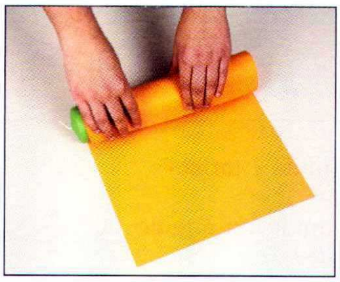


Se concluye la construcción de la función $y = sen\ x$ del siguiente modo:

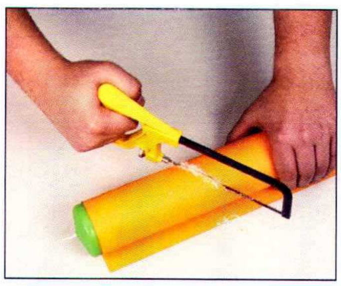


Otra forma de plasmar la curva seno

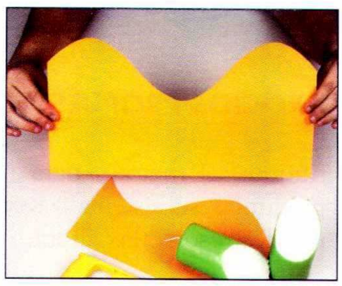
Otra forma de conseguir la curva de la función $y = sen\ x$ es la siguiente:



Toma un folio y enróllalo alrededor de una vela.



Córtala trazando un ángulo de 45° con su eje.



Desarrolla. La curva resultante es $y = sen\ x$.

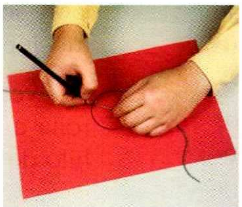
5.1 UNA NUEVA UNIDAD PARA MEDIR ÁNGULOS: EL RADIÁN

NOTA HISTÓRICA

La unidad de medida de ángulos que has utilizado hasta ahora, el grado, proviene de la antigua Babilonia. Los babilonios supusieron, en un principio, que el año tenía 360 días y tomaron como medida angular "el recorrido diario del Sol alrededor de la Tierra". Esta forma de medir ha perdurado hasta nuestros días y su influencia se ha dejado notar, también, en la medición del tiempo.

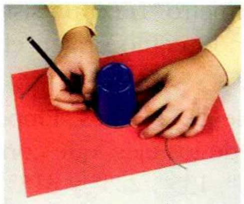
Idea intuitiva de la nueva unidad

Haz lo siguiente (o imagina que lo haces):

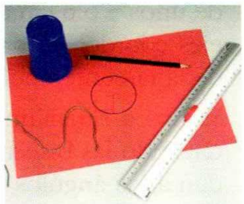


Dibuja una circunferencia con un vaso.

Localiza el centro y sobre una cuerda fina señala, mediante dos puntos, la longitud del radio.

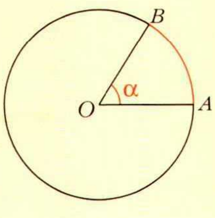


Sitúa de nuevo el vaso sobre la circunferencia, enrolla la cuerda a su alrededor y señala en el papel los dos puntos de la cuerda que marcaste.



Traza los radios correspondientes a esos dos puntos. Obtendrás un ángulo de unos 57°.

Ese ángulo de unos 57° se llama radián y, en adelante, va a ser otra unidad de medida de ángulos.



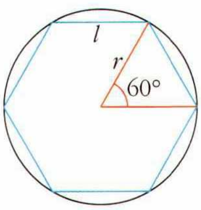
Se llama **radián** a un ángulo tal que el arco que abarca tiene la misma longitud que el radio con el que se ha trazado.

Es decir, α es un radián porque la longitud del arco AB es igual a la del radio:

$$\text{longitud de } \widehat{AB} = \overline{OA}$$

RECUERDA

En un hexágono regular el lado es igual que el radio, $l = r$.

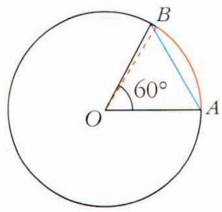


Por tanto, a una cuerda igual al radio le corresponde un ángulo de 60°.

Si la circunferencia fuera el doble de grande, el radio también sería el doble, por lo que el ángulo correspondiente a un arco que mida como el radio sería el mismo.

Regla práctica: recordar el valor aproximado de un radián

Si el hilo de longitud **1 radio**, en vez de apoyarlo sobre la circunferencia (1 radián), lo tensamos a lo largo de una cuerda, abarcará 60°, es decir, algo más que antes. Quizá esto te sirva para recordar que **1 radián mide algo menos de 60°**.



EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Aunque el método para resolver las siguientes preguntas se sistematiza en la página siguiente, puedes resolverlas ahora:

a) ¿Cuántos radianes corresponden a los 360° de una circunferencia?

b) ¿Cuántos grados mide 1 radián?

c) ¿Cuántos grados mide un ángulo de $\frac{\pi}{2}$ radianes?

d) ¿Cuántos radianes equivalen a 270°?

Paso de radianes a grados, y viceversa

La longitud de la circunferencia es $2\pi r$. Por tanto, el número de radianes de un ángulo completo es 2π. Sabemos que el número de grados de un ángulo completo es 360°. Por tanto:

$$360° = 2\pi \text{ radianes}$$

Esta igualdad nos permite pasar de grados a radianes y de radianes a grados.

PASO DE GRADOS A RADIANES

$$\alpha \text{ grados} = \frac{2\pi}{360} \cdot \alpha \text{ radianes}$$

PASO DE RADIANES A GRADOS

$$n \text{ radianes} = \frac{360}{2\pi} \cdot n \text{ grados}$$

El valor de un radián es: $\dfrac{360}{2\pi} = \dfrac{180}{3{,}1416} \approx 57°\ 17'\ 45''$

TEN EN CUENTA

- Para la resolución de triángulos, conviene expresar los ángulos en grados (° ' '').
- Para manejar funciones trigonométricas, conviene expresar los ángulos en radianes.

Utilidad de los radianes

Para los problemas de trigonometría, astronomía, navegación y resolución de triángulos en general, se usan las medidas de los ángulos en grados. Así lo seguiremos haciendo. La ventaja de los radianes se verá en la representación y el estudio de las funciones trigonométricas:

$$y = sen\ x \qquad y = cos\ x \qquad y = tg\ x$$

Este será el objetivo del próximo apartado.

Calculadora

Para hallar las razones trigonométricas de un ángulo dado en radianes, hay que empezar poniendo la calculadora en el modo correspondiente (MODE RAD). Por ejemplo:

sen (1 radián): (RAD) [sin] 1 [=] → [0.84147098] → *sen* (1 rad) = 0,84

$tg\left(\frac{\pi}{4}\text{ rad}\right)$: (RAD) [tan] [(] [π] [÷] 4 [)] [=] → [1] → $tg\left(\frac{\pi}{4}\text{ rad}\right) = 1$

EJERCICIOS PROPUESTOS

2. Pasa a radianes los siguientes ángulos:

a) 30° b) 72° c) 90°
d) 127° e) 200° f) 300°

Expresa el resultado en función de π y luego en forma decimal.

Por ejemplo: $30° = 30 \cdot \frac{\pi}{180}\text{ rad} = \frac{\pi}{6}\text{ rad} \approx 0{,}52\text{ rad}$

3. Pasa a grados los siguientes ángulos:

a) 2 rad b) 0,83 rad c) $\frac{\pi}{5}$ rad
d) $\frac{5\pi}{6}$ rad e) 3,5 rad f) π rad

4. Completa la siguiente tabla y añade las razones trigonométricas (seno, coseno y tangente) de cada uno de los ángulos. Te será útil para el próximo apartado:

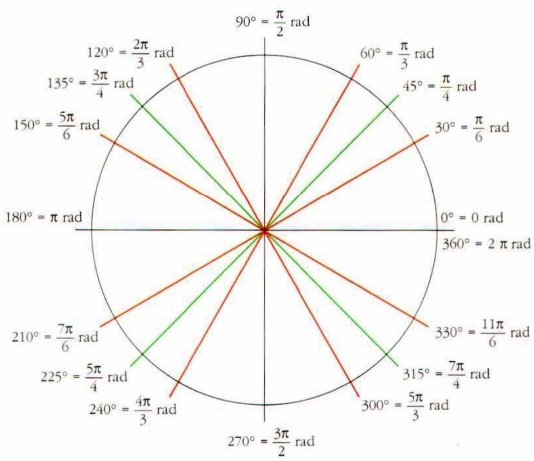
GRADOS	0°	30°		60°	90°		135°	150°	
RADIANES			$\frac{\pi}{4}$			$\frac{2}{3}\pi$			π

GRADOS	210°	225°		270°			330°	360°
RADIANES			$\frac{4}{3}\pi$		$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$		

5.2 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS O CIRCULARES

Vamos a construir unas funciones que asocien a cada ángulo, en radianes, el valor de su seno, su coseno o su tangente.

Recordemos el valor de estas razones trigonométricas para algunos ángulos del intervalo $[0, 2\pi)$.



GRADOS	**0°**	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**	**120°**	**135°**	**150°**
RADIANES	**0**	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$
sen	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$
tg	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}/3$

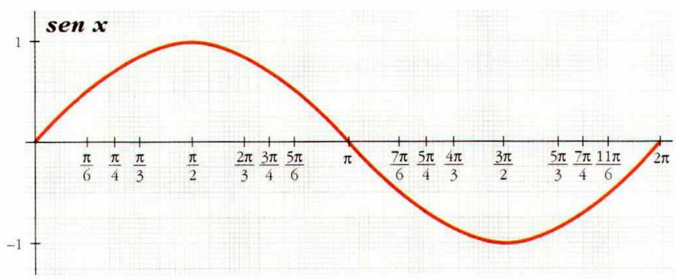
GRADOS	**180°**	**210°**	**225°**	**240°**	**270°**	**300°**	**315°**	**330°**
RADIANES	π	$7\pi/6$	$5\pi/4$	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$5\pi/3$	$7\pi/4$	$11\pi/6$
sen	0	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-1/2$
cos	-1	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-1/2$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
tg	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}/3$

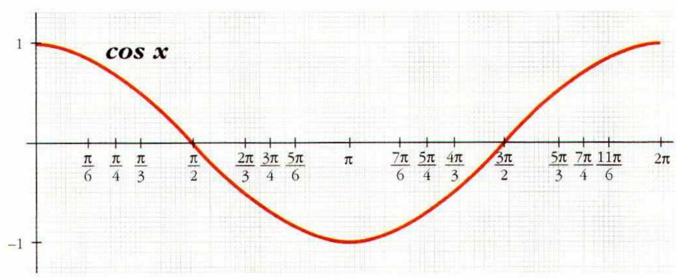
Con estos datos se construyen las funciones:

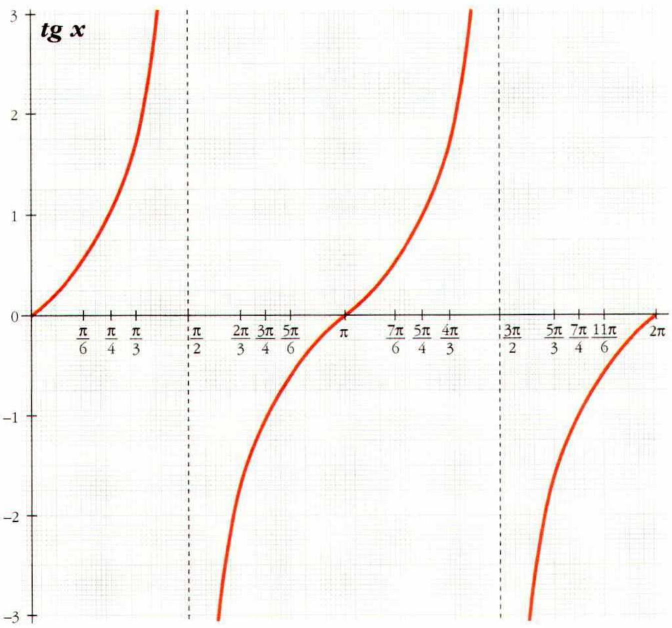
$$y = sen\,x \qquad y = cos\,x \qquad y = tg\,x$$

en las que la abscisa es la medida del ángulo en radianes, y la ordenada, el valor de la razón trigonométrica correspondiente.

Se las llama **funciones trigonométricas** o **funciones circulares**.







Las funciones trigonométricas se definen en todo ℝ

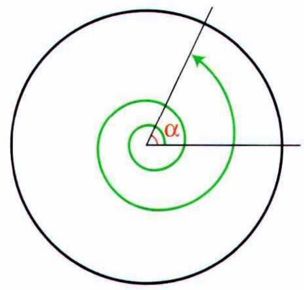
Hay muchas ocasiones en las que las funciones *sen x*, *cos x*, *tg x* tienen sentido para valores de x fuera del intervalo $[0, 2\pi)$.

Puesto que dos ángulos α y α' relacionados así:

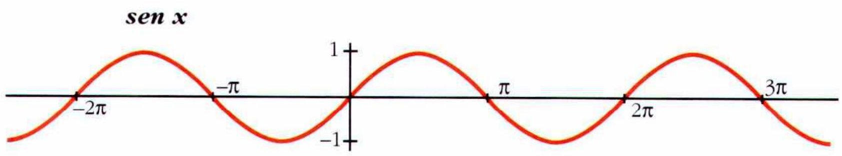
$\alpha' = \alpha + 360° \cdot n$ (α' y α en grados y n entero)

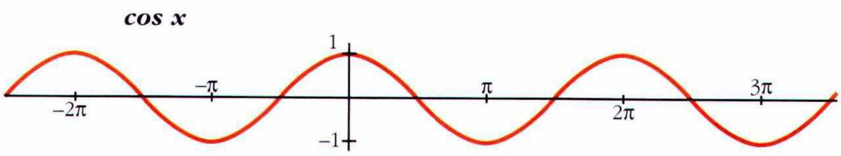
$\alpha' = \alpha + 2\pi \cdot n$ (α' y α en radianes y n entero)

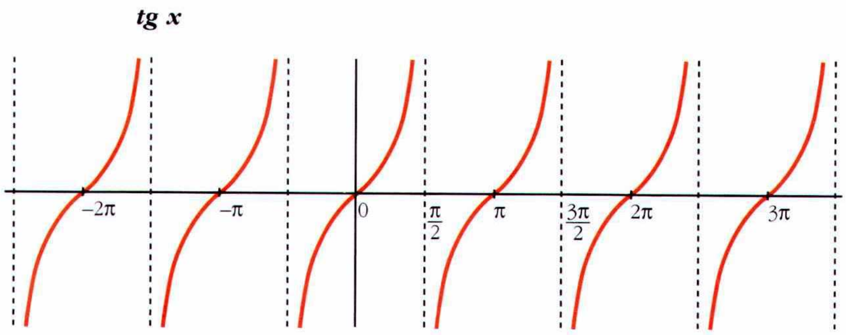
se sitúan en la misma posición, tienen las mismas razones trigonométricas. Eso quiere decir que las funciones *sen x*, *cos x*, *tg x* repiten periódicamente sus valores en cada intervalo de longitud 2π.



$\alpha' = \alpha + 360° \cdot n = \alpha + 2\pi n$ rad





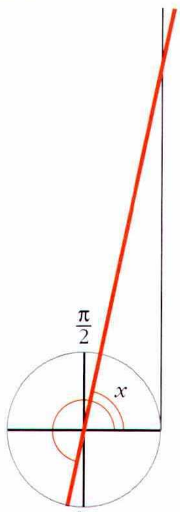


La función $y = tg\, x$ no está definida en los puntos

$$x = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

donde n es un número entero (positivo o negativo).

TEN EN CUENTA



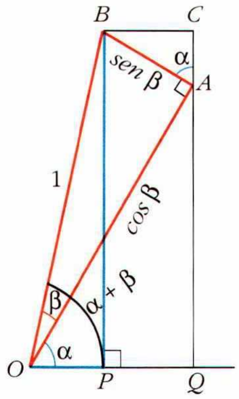
Cuando x toma valores próximos a $\frac{\pi}{2}$ o a $\frac{3\pi}{2}$, los valores de la tangente se hacen muy grandes en valor absoluto.

Lo mismo ocurre en las abscisas $\frac{\pi}{2} + k\pi$.

5.3 FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS

Razones trigonométricas de la suma de dos ángulos

Pretendemos obtener las razones trigonométricas del ángulo $\alpha + \beta$ en función de las razones trigonométricas de α y de β. Para ello nos valdremos de la figura del margen, en la que hemos representado α, β y $\alpha + \beta$:



- En el triángulo rojo OAB, cuya hipotenusa $\overline{OB}$ mide 1 (es decir, la tomamos como unidad), es claro que:

  $cos\ \beta = \overline{OA}$ $\qquad$ $sen\ \beta = \overline{AB}$

- En el triángulo azul OPB observamos que:

  $$sen\ (\alpha + \beta) = \frac{\overline{PB}}{\overline{OB}} = \overline{PB} \qquad (1)$$

- Además, podemos expresar $\overline{PB}$ como $\overline{QA} + \overline{AC}$.

  $\overline{QA}$ es la altura del triángulo OQA:

  $\overline{QA} = \overline{OA}\ sen\ \alpha = cos\ \beta\ sen\ \alpha$

  $\overline{AC}$ es la proyección de $\overline{AB}$ sobre la vertical:

  $\overline{AC} = \overline{AB}\ cos\ \alpha = sen\ \beta\ cos\ \alpha$

  Por tanto: $\overline{PB} = sen\ \alpha\ cos\ \beta + cos\ \alpha\ sen\ \beta \qquad (2)$

Igualando las expresiones (1) y (2), obtenemos:

$$sen\ (\alpha + \beta) = sen\ \alpha\ cos\ \beta + cos\ \alpha\ sen\ \beta \quad (*)$$

A partir de esta fórmula vamos a obtener fácilmente las demás:

$$\begin{aligned} cos\ (\alpha + \beta) &= sen\ [90° + (\alpha + \beta)] = sen\ [(90° + \alpha) + \beta] = \quad \text{(aplicamos *)} \\ &= sen\ (90° + \alpha)\ cos\ \beta + cos\ (90° + \alpha)\ sen\ \beta = \\ &= cos\ \alpha\ cos\ \beta + (-sen\ \alpha)\ sen\ \beta = \\ &= cos\ \alpha\ cos\ \beta - sen\ \alpha\ sen\ \beta \end{aligned}$$

$$tg\ (\alpha + \beta) = \frac{sen\ (\alpha + \beta)}{cos\ (\alpha + \beta)} = \frac{sen\ \alpha\ cos\ \beta + cos\ \alpha\ sen\ \beta}{cos\ \alpha\ cos\ \beta - sen\ \alpha\ sen\ \beta} =$$

(Dividimos numerador y denominador por $cos\ \alpha\ cos\ \beta$)

$$= \frac{\dfrac{sen\ \alpha\ cos\ \beta}{cos\ \alpha\ cos\ \beta} + \dfrac{cos\ \alpha\ sen\ \beta}{cos\ \alpha\ cos\ \beta}}{\dfrac{cos\ \alpha\ cos\ \beta}{cos\ \alpha\ cos\ \beta} - \dfrac{sen\ \alpha\ sen\ \beta}{cos\ \alpha\ cos\ \beta}} = \frac{tg\ \alpha + tg\ \beta}{1 - tg\ \alpha\ tg\ \beta}$$

Hemos obtenido, pues, las siguientes fórmulas:

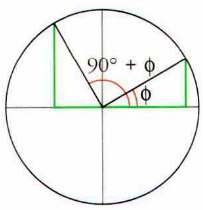
RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO SUMA

$$sen\ (\alpha + \beta) = sen\ \alpha\ cos\ \beta + cos\ \alpha\ sen\ \beta \qquad \textbf{(I.1)}$$

$$cos\ (\alpha + \beta) = cos\ \alpha\ cos\ \beta - sen\ \alpha\ sen\ \beta \qquad \textbf{(I.2)}$$

$$tg\ (\alpha + \beta) = \frac{tg\ \alpha + tg\ \beta}{1 - tg\ \alpha\ tg\ \beta} \qquad \textbf{(I.3)}$$

RECUERDA



$sen\ [90° + \phi] = cos\ \phi$

$cos\ [90° + \phi] = -sen\ \phi$

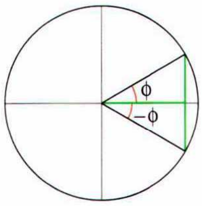
Razones trigonométricas de la diferencia de dos ángulos

Si en la primera de las fórmulas anteriores ponemos $-\beta$ en lugar de β, obtenemos:

$$sen\,(\alpha - \beta) = sen\,[\alpha + (-\beta)] = sen\,\alpha\,cos\,(-\beta) + cos\,\alpha\,sen\,(-\beta) =$$
$$= sen\,\alpha\,cos\,\beta + cos\,\alpha\,(-sen\,\beta) = sen\,\alpha\,cos\,\beta - cos\,\alpha\,sen\,\beta$$

Análogamente, procederíamos con $cos\,(\alpha - \beta)$ y $tg\,(\alpha - \beta)$, obteniendo:

RECUERDA



$cos\,(-\phi) = cos\,\phi$

$sen\,(-\phi) = -sen\,\phi$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO DIFERENCIA

$sen\,(\alpha - \beta) = sen\,\alpha\,cos\,\beta - cos\,\alpha\,sen\,\beta$ **(II.1)**

$cos\,(\alpha - \beta) = cos\,\alpha\,cos\,\beta + sen\,\alpha\,sen\,\beta$ **(II.2)**

$tg\,(\alpha - \beta) = \dfrac{tg\,\alpha - tg\,\beta}{1 + tg\,\alpha\,tg\,\beta}$ **(II.3)**

Razones trigonométricas del ángulo doble

Si en las fórmulas **(I)** hacemos $\alpha = \beta$, obtendremos las razones trigonométricas de 2α en función de α:

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO DOBLE

$sen\,2\alpha = 2\,sen\,\alpha\,cos\,\alpha$ **(III.1)**

$cos\,2\alpha = cos^2\,\alpha - sen^2\,\alpha$ **(III.2)**

$tg\,2\alpha = \dfrac{2tg\,\alpha}{1 - tg^2\,\alpha}$ **(III.3)**

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Demuestra la fórmula **II.2** a partir de la fórmula:

$$cos\,(\alpha + \beta) = cos\,\alpha\,cos\,\beta - sen\,\alpha\,sen\,\beta$$

2. Demuestra la fórmula **II.3** a partir de la fórmula:

$$tg\,(\alpha + \beta) = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha\,tg\,\beta}$$

3. Demuestra la fórmula **II.3** a partir de las siguientes fórmulas:

$$sen\,(\alpha - \beta) = sen\,\alpha\,cos\,\beta - cos\,\alpha\,sen\,\beta$$

$$cos\,(\alpha - \beta) = cos\,\alpha\,cos\,\beta + sen\,\alpha\,sen\,\beta$$

4. Si $sen\,12° = 0{,}2$ y $sen\,37° = 0{,}6$, halla $cos\,12°$, $tg\,12°$, $cos\,37°$ y $tg\,37°$. Calcula, después, a partir de ellas, las razones trigonométricas de 49° y de 25°, utilizando las fórmulas **(I)** y **(II)**.

5. Demuestra la siguiente igualdad:

$$\frac{cos\,(a + b) + cos\,(a - b)}{sen\,(a + b) + sen\,(a - b)} = \frac{1}{tg\,a}$$

6. Demuestra las tres fórmulas **(III.1)**, **(III.2)** y **(III.3)** haciendo $\alpha = \beta$ en las fórmulas **(I)**.

7. Halla las razones trigonométricas de 60° a partir de las de 30°.

8. Halla las razones trigonométricas de 90° a partir de las de 45°.

9. Demuestra que:

$$\frac{2\,sen\,\alpha - sen\,2\alpha}{2\,sen\,\alpha + sen\,2\alpha} = \frac{1 - cos\,\alpha}{1 + cos\,\alpha}$$

Razones trigonométricas del ángulo mitad

Vamos a ver cómo obtener las razones trigonométricas del ángulo $\frac{\alpha}{2}$ en función de $cos\ \alpha$.

RECUERDA

(III.2) $cos\ 2\alpha = cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha$

Teniendo en cuenta que $\alpha = 2 \cdot \frac{\alpha}{2}$ y aplicando **(III.2)**:

$$cos\ \alpha = cos\left(2 \cdot \frac{\alpha}{2}\right) = cos^2 \frac{\alpha}{2} - sen^2 \frac{\alpha}{2}$$

De esta forma:

$$\begin{cases} cos\ \alpha = cos^2 \frac{\alpha}{2} - sen^2 \frac{\alpha}{2} \\ 1 = cos^2 \frac{\alpha}{2} + sen^2 \frac{\alpha}{2} \quad \text{(Esta es una igualdad fundamental)} \end{cases}$$

Sumando y restando ambas igualdades se obtiene, respectivamente:

$$\left.\begin{array}{l} 1 + cos\ \alpha = 2cos^2 \frac{\alpha}{2} \\ 1 - cos\ \alpha = 2sen^2 \frac{\alpha}{2} \end{array}\right\}$$

De estas igualdades se despeja, respectivamente, $cos \frac{\alpha}{2}$ y $sen \frac{\alpha}{2}$.

A partir de ellas se obtiene $tg \frac{\alpha}{2}$.

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO MITAD

$$sen \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - cos\ \alpha}{2}} \quad \textbf{(IV.1)}$$

$$cos \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + cos\ \alpha}{2}} \quad \textbf{(IV.2)}$$

$$tg \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - cos\ \alpha}{1 + cos\ \alpha}} \quad \textbf{(IV.3)}$$

En cada caso, el signo será + o – según el cuadrante en el que se encuentre el ángulo $\frac{\alpha}{2}$.

EJERCICIOS PROPUESTOS

10. Siguiendo las indicaciones que se dan, demuestra detalladamente las fórmulas **IV.1**, **IV.2** y **IV.3**.

11. Sabiendo que $cos\ 78° = 0{,}2$, calcula $sen\ 78°$ y $tg\ 78°$. Averigua las razones trigonométricas de 39° aplicando las fórmulas del ángulo mitad.

12. Halla las razones trigonométricas de 30° a partir de $cos\ 60° = 0{,}5$.

13. Halla las razones trigonométricas de 45° a partir de $cos\ 90° = 0$.

14. Demuestra que $2tg\ \alpha \cdot sen^2 \frac{\alpha}{2} + sen\ \alpha = tg\ \alpha$.

15. Demuestra que $\frac{2sen\ \alpha - sen\ 2\alpha}{2sen\ \alpha + sen\ 2\alpha} = tg^2 \frac{\alpha}{2}$.

Sumas y diferencias de senos y de cosenos

A veces conviene expresar una suma o una diferencia en forma de producto. Para esto, son útiles las siguientes fórmulas:

SUMAS Y DIFERENCIAS DE SENOS Y DE COSENOS

$$sen\,A + sen\,B = 2\,sen\,\frac{A+B}{2}\,cos\,\frac{A-B}{2} \qquad \textbf{(V.1)}$$

$$sen\,A - sen\,B = 2\,cos\,\frac{A+B}{2}\,sen\,\frac{A-B}{2} \qquad \textbf{(V.2)}$$

$$cos\,A + cos\,B = 2\,cos\,\frac{A+B}{2}\,cos\,\frac{A-B}{2} \qquad \textbf{(V.3)}$$

$$cos\,A - cos\,B = -2\,sen\,\frac{A+B}{2}\,sen\,\frac{A-B}{2} \qquad \textbf{(V.4)}$$

Vamos a deducir las dos primeras basándonos en otras que ya conocemos:

$$sen\,(\alpha + \beta) = sen\,\alpha\ cos\,\beta + cos\,\alpha\ sen\,\beta$$

$$sen\,(\alpha - \beta) = sen\,\alpha\ cos\,\beta - cos\,\alpha\ sen\,\beta$$

Sumando $\rightarrow$ $sen\,(\alpha + \beta) + sen\,(\alpha - \beta) = 2\,sen\,\alpha\,cos\,\beta$ (1)

Restando $\rightarrow$ $sen\,(\alpha + \beta) - sen\,(\alpha - \beta) = 2\,cos\,\alpha\,sen\,\beta$ (2)

Conviene cambiar la notación para facilitar los cálculos.

Llamando $\left.\begin{array}{l}\alpha + \beta = A\\ \alpha - \beta = B\end{array}\right\}$ y resolviendo el sistema, se tiene:

$$\alpha = \frac{A+B}{2} \qquad \beta = \frac{A-B}{2}$$

Sustituyendo en (1) y (2) se obtienen **V.1** y **V.2**.

En tu CD se te explica cómo trabajar:
con **DERIVE** (1)
con **CALCULADORA GRÁFICA** (2) y
con **HOJA DE CÁLCULO** (3)
algunos aspectos de esta unidad.

EJERCICIOS PROPUESTOS

16. Para demostrar las fórmulas **(V.3)** y **(V.4)**, da los siguientes pasos:

- Expresa en función de α y β:

  $cos\,(\alpha + \beta) =$ .... $\quad cos\,(\alpha - \beta) =$ ....

- Suma y resta como hemos hecho arriba y obtendrás dos expresiones.

- Sustituye en las expresiones anteriores:

  $\left.\begin{array}{l}\alpha + \beta = A\\ \alpha - \beta = B\end{array}\right\} \rightarrow \alpha = \frac{A+B}{2} \qquad \beta = \frac{A-B}{2}$

17. Transforma en producto y calcula:

a) $sen\,75° - sen\,15°$

b) $cos\,75° + cos\,15°$

c) $cos\,75° - cos\,15°$

18. Expresa en forma de producto el numerador y el denominador de esta fracción y simplifica el resultado:

$$\frac{sen\,4a + sen\,2a}{cos\,4a + cos\,2a}$$

5.4 ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

SOLUCIONES EXTRAÑAS

Se suele llamar **solución extraña** a un valor de la variable que se obtiene en el proceso de resolución de una ecuación pero que, realmente, no cumple la ecuación. Obviamente, no es una solución.

Ecuaciones trigonométricas son aquellas en las que aparecen funciones trigonométricas actuando sobre un ángulo incógnita que, como en todas las ecuaciones, hay que despejar.

Salvo que se pida expresamente, el valor de la incógnita puede darse indistintamente en grados o en radianes.

Las soluciones que se obtengan deben ser comprobadas sobre la ecuación inicial, pues es frecuente que aparezcan *soluciones extrañas*.

Suele ser suficiente dar las soluciones comprendidas entre 0° y 360°.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. *Resolver la ecuación:*

$cos\,(30° + \alpha) = sen\,\alpha$

En el primer miembro de la ecuación tenemos el coseno de una suma. Lo desarrollamos aplicando **(I.2)**:

$$cos\,30°\,cos\,\alpha - sen\,30°\,sen\,\alpha = sen\,\alpha$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}cos\,\alpha - \frac{1}{2}sen\,\alpha = sen\,\alpha \;\rightarrow\; \sqrt{3}\,cos\,\alpha = 3sen\,\alpha$$

Dividimos los dos miembros por $cos\,\alpha$:

$$\sqrt{3} = 3\,\frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} \;\rightarrow\; \sqrt{3} = 3tg\,\alpha \;\rightarrow\; tg\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Posibles soluciones: 30° y 210°. Al comprobarlas sobre la ecuación inicial, vemos que las dos son válidas.

Por tanto, las soluciones son:

$$\boxed{\alpha_1 = 30° \;\text{ y }\; \alpha_2 = 210°}$$

2. *Resolver la ecuación:*

$sen\,2\alpha = tg\,\alpha$

Expresamos $sen\,2\alpha$ **(III.1)** y $tg\,\alpha$ en función de $sen\,\alpha$ y $cos\,\alpha$:

$2\,sen\,\alpha\,cos\,\alpha = \dfrac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}$ Multiplicamos todo por $cos\,\alpha$ y pasamos al primer miembro:

$$2\,sen\,\alpha\,cos^2\,\alpha - sen\,\alpha = 0 \xrightarrow{\text{sacando factor común}} sen\,\alpha\,(2cos^2\,\alpha - 1) = 0$$

$$\text{Posibles soluciones}\left\{\begin{array}{l} sen\,\alpha = 0 \;\rightarrow\; \boxed{\alpha_1 = 0°,\;\alpha_2 = 180°} \\[2ex] cos^2\,\alpha = \dfrac{1}{2} \;\rightarrow\; \left\{\begin{array}{l} cos\,\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \;\rightarrow\; \boxed{\alpha_3 = 45°,\;\alpha_4 = 315°} \\[2ex] cos\,\alpha = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \;\rightarrow\; \boxed{\alpha_5 = 135°,\;\alpha_6 = 225°} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Al comprobarlas sobre la ecuación inicial, vemos que las seis soluciones son válidas.

3. *Resolver la ecuación:*
$\cos 3\alpha + \cos \alpha = 0$

Puesto que el segundo miembro es 0, la resolución se simplificaría mucho si el primer miembro se pudiera poner en forma de producto. Para ello aplicamos la fórmula **V.3**.

$$2 \cos \frac{3\alpha + \alpha}{2} \cos \frac{3\alpha - \alpha}{2} = 0 \rightarrow 2 \cos 2\alpha \cos \alpha = 0 \rightarrow \begin{cases} \cos 2\alpha = 0 \\ \cos \alpha = 0 \end{cases}$$

Si $\cos \alpha = 0 \rightarrow \boxed{\alpha_1 = 90°, \ \alpha_2 = 270°}$

$$(*) \text{ Si } \cos 2\alpha = 0 \underset{(III.2)}{\longrightarrow} \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = 0 \rightarrow \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2\cos^2 \alpha - 1 = 0 \rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \boxed{\alpha_3 = 45°, \ \alpha_4 = 315°}$$

$$\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \boxed{\alpha_5 = 135°, \ \alpha_6 = 225°}$$

Se comprueba que las seis soluciones son válidas.

Observa que a partir de (*) podríamos haber actuado de esta otra forma:

$$(*) \ \cos 2\alpha = 0 \begin{cases} 2\alpha = 90° \longrightarrow \alpha_3 = 45° \\ 2\alpha = 270° \longrightarrow \alpha_5 = 135° \\ 2\alpha = 90° + 360° = 450° \longrightarrow \alpha_6 = 225° \\ 2\alpha = 270° + 360° = 630° \longrightarrow \alpha_4 = 315° \end{cases}$$

Si sumáramos a los valores de 2α múltiplos de 360°, obtendríamos para α soluciones equivalentes a estas cuatro.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Resuelve estas ecuaciones:

a) $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

b) $2\operatorname{sen}^2 x - 1 = 0$

c) $tg^2 x - tg\, x = 0$

d) $2\operatorname{sen}^2 x + 3\cos x = 3$

2. Resuelve:

a) $4\cos 2x + 3\cos x = 1$

b) $tg\, 2x + 2\cos x = 0$

c) $\sqrt{2} \cos (x/2) - \cos x = 1$

d) $2\operatorname{sen} x \cos^2 x - 6\operatorname{sen}^3 x = 0$

3. Transforma en producto $\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x$ y resuelve después la ecuación $\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x = 0$.

4. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\operatorname{sen} (\pi - x) = \cos \left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cos \pi$

b) $\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \sqrt{2} \operatorname{sen} x = 0$

5. Escribe, en radianes, la expresión general de todos los ángulos que verifican:

a) $tg\, x = -\sqrt{3}$

b) $\operatorname{sen} x = \cos x$

c) $\operatorname{sen}^2 x = 1$

d) $\operatorname{sen} x = tg\, x$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

1 Ángulos en radianes

a) ***Expresa en radianes los ángulos de 30°, 45°, 60° y 90° a partir de la equivalencia 180° = π rad.***

b) ***Expresa en radianes los siguientes ángulos, teniendo en cuenta que son múltiplos de los anteriores: 150°, 135°, 240°, 300°, 270° y 495°.***

c) ***Obtén el valor exacto de la siguiente expresión sin utilizar la calculadora:***

$$sen\,\frac{2\pi}{3} - cos\,\frac{7\pi}{6} + tg\,\frac{4\pi}{3} + tg\,\frac{11\pi}{6}$$

a) $30° = \dfrac{180°}{6} = \dfrac{\pi}{6}$ rad $\qquad 45° = \dfrac{180°}{4} = \dfrac{\pi}{4}$ rad

$60° = \dfrac{180°}{3} = \dfrac{\pi}{3}$ rad $\qquad 90° = \dfrac{180°}{2} = \dfrac{\pi}{2}$ rad

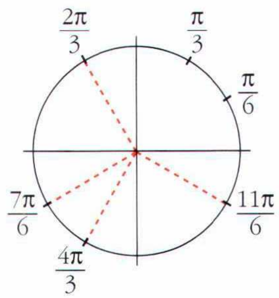
b) $150° = 5 \cdot 30° = 5\dfrac{\pi}{6}$ rad $\qquad 135° = 3 \cdot 45° = 3\dfrac{\pi}{4}$ rad

$240° = 8 \cdot 30° = 8\dfrac{\pi}{6}$ rad $= \dfrac{4\pi}{3}$ rad o bien $240° = 4 \cdot 60° = 4\dfrac{\pi}{3}$ rad

$300° = 10 \cdot 30° = 10\dfrac{\pi}{6}$ rad $= \dfrac{5\pi}{3}$ rad o bien $300° = 5 \cdot 60° = \dfrac{5\pi}{3}$ rad

$270° = 3 \cdot 90° = 3\dfrac{\pi}{2}$ rad $\qquad 495° = 11 \cdot 45° = 11\dfrac{\pi}{4}$ rad

c) Dibujamos los ángulos en la circunferencia goniométrica y observamos su relación con otros del primer cuadrante:



$$sen\,\frac{2\pi}{3} = sen\,\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$cos\,\frac{7\pi}{6} = -cos\,\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg\,\frac{4\pi}{3} = tg\,\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$tg\,\frac{11\pi}{6} = -tg\,\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$sen\,\frac{2\pi}{3} - cos\,\frac{7\pi}{6} + tg\,\frac{4\pi}{3} + tg\,\frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

2 Calculadora en radianes

Escribe en radianes la expresión general de todos los ángulos que verifican:

a) ***tg α = 2***

b) ***sen α = 0,72***

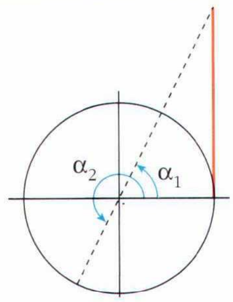
Ponemos la calculadora en radianes, MODE RAD.

a) SHIFT tan 2 = 1.107148...

$\alpha_1 \approx 1{,}11 + 2\pi k$ rad

1.107148... + π = 4.248741...

$\alpha_2 \approx 4{,}25 + 2\pi k$ rad

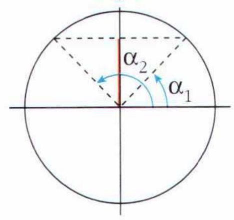


b) SHIFT sin 0,72 = 0.803802...

$\alpha_1 \approx 0{,}8 + 2\pi k$ rad

π − Ans = 2.337790...

$\alpha_2 \approx 2{,}34 + 2\pi k$ rad



3 Fórmulas trigonométricas

Si $sen\,\alpha = -\dfrac{3}{5}$ ***y*** $cos\,\alpha < 0$***,***

calcula:

a) $cos\,(\pi + \alpha)$

b) $sen\,2\alpha$

c) $tg\,\dfrac{\alpha}{2}$

d) $sen\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)$

e) $tg\,(\pi - \alpha)$

f) $sen\left(\alpha + \dfrac{\pi}{6}\right)$

Calculamos en primer lugar $cos\,\alpha$ y $tg\,\alpha$, sabiendo que $180° < \alpha < 270°$:

$$cos\,\alpha = -\sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}; \quad tg\,\alpha = \frac{-3/5}{-4/5} = \frac{3}{4}$$

a) $cos\,(\pi + \alpha) = -cos\,\alpha = \dfrac{4}{5}$

b) $sen\,2\alpha = 2\,sen\,\alpha\,cos\,\alpha = 2\left(-\dfrac{3}{5}\right)\left(-\dfrac{4}{5}\right) = \dfrac{24}{25}$

c) $tg\,\dfrac{\alpha}{2} = -\sqrt{\dfrac{1 - cos\,\alpha}{1 + cos\,\alpha}} = -\sqrt{\dfrac{1 + 4/5}{1 - 4/5}} = -3 \quad \left(\dfrac{\alpha}{2} \text{ está en el 2.º cuadrante}\right)$

d) $sen\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = cos\,\alpha = -\dfrac{4}{5}$

e) $tg\,(\pi - \alpha) = -tg\,\alpha = -\dfrac{3}{4}$

f) $sen\left(\alpha + \dfrac{\pi}{6}\right) = sen\,\alpha\;cos\,\dfrac{\pi}{6} + cos\,\alpha\;sen\,\dfrac{\pi}{6} =$

$$= \left(-\frac{3}{5}\right)\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{4}{5}\right)\frac{1}{2} = \frac{-3\sqrt{3} - 4}{10}$$

4 Función seno

Haz, con la calculadora, una tabla de valores de la función $y = sen\,2x$***, dando a*** x ***valores comprendidos entre 0 y*** 2π ***radianes, y representa gráficamente esa función.***

¿Cuál es su periodo?

Ponemos la calculadora en radianes, MODE RAD.

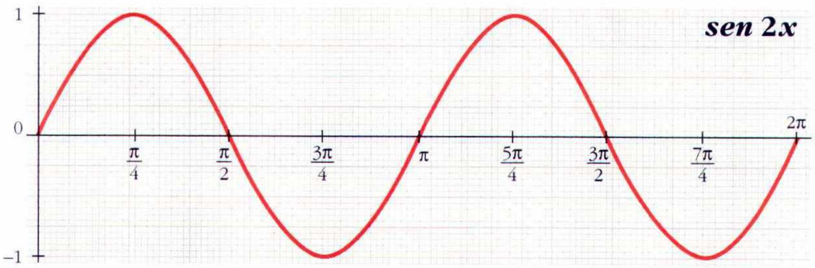
Para calcular el valor de $sen\,2x$ correspondiente a $x = \dfrac{\pi}{4}$, haremos:

sin (π ÷ 4 × 2) = 1

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
y = sen 2x	0	0,87	1	0,87	0	–0,87	–1	–0,87	0

x	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y = sen 2x	0	0,87	1	0,87	0	–0,87	–1	–0,87	0

Para representar estos puntos expresamos los valores de x en forma decimal $\left(\dfrac{\pi}{4} \approx 0{,}78;\ \dfrac{\pi}{2} \approx 1{,}57\ldots\right)$.



Sus valores se repiten periodicamente en cada intervalo de longitud π. Su periodo es π.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

5 Identidades trigonométricas

Demuestra que:

a) $tg(45° + \alpha) - tg(45° - \alpha) = 2\,tg\,2\alpha$

b) $\dfrac{\cos x + \operatorname{sen} x}{\cos x - \operatorname{sen} x} \cdot \cos 2x = 1 + \operatorname{sen} 2x$

a) Desarrollamos el primer miembro y sustituimos $tg\,45° = 1$:

$$\frac{tg\,45° + tg\,\alpha}{1 - tg\,45°\,tg\,\alpha} - \frac{tg\,45° - tg\,\alpha}{1 + tg\,45°\,tg\,\alpha} = \frac{1 + tg\,\alpha}{1 - tg\,\alpha} - \frac{1 - tg\,\alpha}{1 + tg\,\alpha}$$

Efectuamos la resta reduciendo a denominador común:

$$\frac{(1 + tg\,\alpha)^2 - (1 - tg\,\alpha)^2}{1 - tg^2\,\alpha} = \frac{1 + 2\,tg\,\alpha + tg^2\,\alpha - 1 + 2\,tg\,\alpha - tg^2\,\alpha}{1 - tg^2\,\alpha} =$$

$$= \frac{4\,tg\,\alpha}{1 - tg^2\,\alpha} = 2\,\frac{2\,tg\,\alpha}{1 - tg^2\,\alpha} = 2\,tg\,2\alpha$$

b) Teniendo en cuenta que $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$, sustituimos y transformamos la diferencia de cuadrados en suma por diferencia:

$$\frac{\cos x + \operatorname{sen} x}{\cos x - \operatorname{sen} x} \cdot (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) =$$

$$= \frac{(\cos x + \operatorname{sen} x)\,(\cos x + \operatorname{sen} x)\,(\cos x - \operatorname{sen} x)}{\cos x - \operatorname{sen} x} = (\cos x + \operatorname{sen} x)^2 =$$

$$= \underbrace{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}_{1} + \underbrace{2\,\operatorname{sen} x\,\cos x}_{\operatorname{sen} 2x} = 1 + \operatorname{sen} 2x$$

6 Ecuaciones trigonométricas

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x + \cos x = 0$

b) $tg\,x = \sqrt{2}\cos x$

a) Sustituimos $\operatorname{sen}^2 x$ por $1 - \cos^2 x$:

$$3(1 - \cos^2 x) + \cos^2 x + \cos x = 0 \;\rightarrow\; 2\cos^2 x - \cos x - 3 = 0$$

$$\cos x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{4} = \begin{cases} \dfrac{3}{2}\ \text{(No vale, } |\cos x| \le 1) \\ -1 \rightarrow \boxed{x = 180° + 360°\,k = \pi + 2\pi k \ \text{ con } k \in \mathbb{Z}} \end{cases}$$

b) Hacemos $tg\,x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \;\rightarrow\; \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \sqrt{2}\cos x \;\rightarrow\; \operatorname{sen} x = \sqrt{2}\cos^2 x$

$$\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x \;\rightarrow\; \operatorname{sen} x = \sqrt{2}\,(1 - \operatorname{sen}^2 x) \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; \sqrt{2}\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - \sqrt{2} = 0 \;\rightarrow\; \operatorname{sen} x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2\sqrt{2}}$$

$$\operatorname{sen} x = \begin{cases} -\dfrac{2}{\sqrt{2}} = -1{,}414\ldots\ \text{(No vale)} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x_1 = 45° + 360°\,k = \dfrac{\pi}{4} + 2\,\pi\,k \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{con } k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = 135° + 360°\,k = \dfrac{3\pi}{4} + 2\,\pi\,k \end{array}} \end{cases}$$

7 Ecuaciones trigonométricas

Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $\boldsymbol{sen\ x + cos\ x = 0}$

b) $\boldsymbol{2cos\ x - 1 + sen\ x = 0}$

c) $\boldsymbol{4\ sen \frac{x}{2} + 2\cos x - 3 = 0}$

a) • Dividimos por $cos\, x$ y obtenemos $tg\, x + 1 = 0$. (Observa que $cos\, x$ no puede ser igual a 0. Si fuese $cos\, x = 0$, entonces $sen\, x = 0$ y no hay ningún ángulo cuyo *seno* y *coseno* sean 0).

$$tg\, x = -1 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 135° + 360°\, k = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k \\ x_2 = 315° + 360°\, k = \dfrac{7\pi}{4} + 2\pi k \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

• También se puede resolver haciendo $sen\, x = -cos\, x$.

b) Despejamos $sen\, x$ ($sen\, x = 1 - 2\,cos\, x$) y elevamos al cuadrado para poder aplicar $sen^2\, x = 1 - cos^2\, x$.

$$sen^2\, x = 1 - 4\,cos\, x + 4\,cos^2\, x \rightarrow 1 - cos^2\, x = 1 - 4\,cos\, x + 4\,cos^2\, x \rightarrow$$

$$\rightarrow 5\,cos^2\, x - 4\,cos\, x = 0 \rightarrow cos\, x\,(5\,cos\, x - 4) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} cos\, x = 0 \rightarrow x_1 = 90°, \quad x_2 = 270° \\ cos\, x = \dfrac{4}{5} \rightarrow x_3 = 36°\ 52'\ 11'', \quad x_4 = 323°\ 7'\ 48'' \end{cases}$$

Comprobando en la ecuación inicial, las soluciones válidas son:

$$\boxed{x_1 = 90° + 360°\, k\,; \quad x_2 = 323°\ 7'\ 48'' + 360°\, k \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}}$$

c) Sustituimos $sen \dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - cos\, x}{2}}$

$$4\sqrt{\frac{1 - cos\, x}{2}} + 2\,cos\, x - 3 = 0 \rightarrow \left(4\sqrt{\frac{1 - cos\, x}{2}}\right)^2 = (3 - 2\,cos\, x)^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 8 - 8\,cos\, x = 9 - 12\,cos\, x + 4\,cos^2\, x \rightarrow$$

$$\rightarrow 4\,cos^2\, x - 4\,cos\, x + 1 = 0 \rightarrow cos\, x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{8} = \frac{1}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow cos\, x = \frac{1}{2} \begin{cases} x = 60° + 360°\, k \rightarrow x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k \\ x = 300° + 360°\, k \rightarrow x = \dfrac{5\pi}{3} + 2\pi k \end{cases}$$

Comprobando en la ecuación inicial, las dos soluciones son válidas.

8 Sistemas de ecuaciones trigonométricas

Resuelve el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{sen\ x + sen\ y = 3/2} \\ \boldsymbol{sen\ x \cdot sen\ y = 1/2} \end{array}\right\}$$

dando las soluciones del intervalo [0°, 360°].

Despejamos $sen\, x$ en la primera ecuación: $sen\, x = \dfrac{3}{2} - sen\, y$ (*)

$$\left(\frac{3}{2} - sen\, y\right) sen\, y = \frac{1}{2} \rightarrow 2sen^2\, y - 3sen\, y + 1 = 0$$

$$sen\, y = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{4} = \begin{cases} 1 \longrightarrow y = 90° \\ \dfrac{1}{2} \begin{cases} \rightarrow y = 30° \\ \rightarrow y = 150° \end{cases} \end{cases}$$

Sustituyendo en (*) obtenemos las soluciones (90°, 30°), (90°, 150°), (30°, 90°) y (150°, 90°).

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Grados y radianes

1 Expresa en grados sexagesimales los siguientes ángulos dados en radianes:

a) $\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{2\pi}{3}$ c) $\frac{4\pi}{3}$

d) $\frac{5\pi}{4}$ e) $\frac{7\pi}{6}$ f) $\frac{9\pi}{2}$

☛ *Hazlo mentalmente teniendo en cuenta que:*

π radianes = 180°.

2 Expresa en grados sexagesimales los siguientes ángulos dados en radianes:

a) 1,5 b) 3,2

c) 5 d) 2,75

3 Pasa a radianes los siguientes ángulos dados en grados. Exprésalos en función de π y en forma decimal.

a) 40° b) 108°

c) 135° d) 240°

e) 270° f) 126°

☛ *Simplifica la expresión que obtengas sin multiplicar por 3,14... a)* $\frac{40\pi}{180} = \frac{2\pi}{9} \approx 0,7$ *rad.*

4 Halla el resultado de las siguientes operaciones sin utilizar la calculadora:

a) $5\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0 + 2\cos\pi - \cos\frac{3\pi}{2} + \cos 2\pi$

b) $5\,tg\,\pi + 3\cos\frac{\pi}{2} - 2\,tg\,0 + sen\,\frac{3\pi}{2} - 2\,sen\,2\pi$

c) $\frac{2}{3}\,sen\,\frac{\pi}{2} - 4\,sen\,\frac{3\pi}{2} + 3\,sen\,\pi - \frac{5}{3}\,sen\,\frac{\pi}{2}$

Comprueba el resultado obtenido utilizando la calculadora.

5 Prueba que:

a) $4\,sen\,\frac{\pi}{6} + \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} + \cos\pi = 2$

b) $2\sqrt{3}\,sen\,\frac{2\pi}{3} + 4\,sen\,\frac{\pi}{6} - 2\,sen\,\frac{\pi}{2} = 3$

6 Halla el valor exacto de cada una de estas expresiones sin utilizar la calculadora:

a) $sen\,\frac{\pi}{4} + sen\,\frac{\pi}{2} + sen\,\pi$

b) $\cos\pi - \cos 0 + \cos\frac{\pi}{2} - \cos\frac{3\pi}{2}$

c) $sen\,\frac{2\pi}{3} - \cos\frac{7\pi}{6} + tg\,\frac{4\pi}{3} + tg\,\frac{11\pi}{6}$

Comprueba los resultados con la calculadora.

7 Halla el valor exacto de estas expresiones sin usar la calculadora:

a) $sen\,\frac{5\pi}{4} + \cos\frac{3\pi}{4} - sen\,\frac{7\pi}{4}$

b) $\cos\frac{5\pi}{3} + tg\,\frac{4\pi}{3} - tg\,\frac{7\pi}{6}$

c) $\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} + sen\,\frac{\pi}{6} - \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} - 2\sqrt{3}\,sen\,\frac{\pi}{3}$

Comprueba los resultados con la calculadora.

8 En cada caso halla, en radianes, dos valores para el ángulo α tales que:

a) $sen\,\alpha = 0,32$ b) $\cos\alpha = 0,58$

c) $tg\,\alpha = -1,5$ d) $sen\,\alpha = -0,63$

9 Indica, sin pasar a grados, en qué cuadrante está cada uno de los siguientes ángulos:

a) 2 rad b) 3,5 rad c) 5 rad

☛ *Ten en cuenta que:*

$\frac{\pi}{2} \approx 1,57;$ $\pi \approx 3,14;$ $\frac{3\pi}{2} \approx 4,7;$ $2\pi \approx 6,28$

Fórmulas trigonométricas

10 Halla las razones trigonométricas del ángulo de 75° sabiendo que 75° = 30° + 45°.

11 Sabiendo que $sen\,x = \frac{3}{5}$ y que $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, calcula, sin hallar previamente el valor de x:

a) $sen\,2x$ b) $tg\,\frac{x}{2}$ c) $sen\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

d) $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ e) $\cos\frac{x}{2}$ f) $tg\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

☛ *Calcula* $\cos x$ *y* $tg\,x$ *y después aplica las fórmulas.*

12 Halla las razones trigonométricas del ángulo de 15° de dos formas, considerando:

a) $15° = 45° - 30°$ b) $15° = \dfrac{30°}{2}$

13 Sabiendo que $sen\, x = 2/3$ y que x es un ángulo del primer cuadrante, calcula:

a) $sen\, 2x$ b) $tg\, \dfrac{x}{2}$ c) $cos\,(30° - x)$

14 Si $tg\, \alpha = -4/3$ y $90° < \alpha < 180°$, calcula:

a) $sen \left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)$ b) $cos \left(180° - \dfrac{\alpha}{2}\right)$

15 Sabemos que $cos\, x = -\dfrac{3}{4}$ y $sen\, x < 0$.

Sin hallar el valor de x, calcula:

a) $sen\, x$ b) $cos\,(\pi + x)$ c) $cos\, 2x$

d) $tg\, \dfrac{x}{2}$ e) $sen \left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$ f) $cos \left(\pi - \dfrac{x}{2}\right)$

16 Si $cos\, 78° = 0{,}2$ y $sen\, 37° = 0{,}6$, calcula $sen\, 41°$, $cos\, 41°$ y $tg\, 41°$.

17 Si $tg\,(\alpha + \beta) = 4$ y $tg\, \alpha = -2$, halla $tg\, 2\beta$.

Ecuaciones trigonométricas

18 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2\, cos^2 x - sen^2 x + 1 = 0$

b) $sen^2 x - sen\, x = 0$

c) $2\, cos^2 x - \sqrt{3}\, cos\, x = 0$

☛ *b) y c) son ecuaciones de 2.º grado incompletas.*

19 Resuelve:

a) $sen^2 x - cos^2 x = 1$

b) $cos^2 x - sen^2 x = 0$

c) $2\, cos^2 x + sen\, x = 1$

d) $3\, tg^2 x - \sqrt{3}\, tg\, x = 0$

20 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $sen \left(\dfrac{\pi}{6} - x\right) + cos \left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) = \dfrac{1}{2}$

b) $sen\, 2x - 2\, cos^2 x = 0$

☛ *Desarrolla $sen\, 2x$ y saca factor común.*

c) $cos\, 2x - 3\, sen\, x + 1 = 0$

☛ *Desarrolla $cos\, 2x$ y sustituye $cos^2 x = 1 - sen^2 x$.*

d) $sen \left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) - \sqrt{2}\, sen\, x = 0$

21 Resuelve estas ecuaciones:

a) $4\, sen^2 x\, cos^2 x + 2\, cos^2 x - 2 = 0$

☛ *Al hacer $sen^2 x = 1 - cos^2 x$, resulta una ecuación bicuadrada.*

Haz $cos^2 x = z$ y comprueba si son válidas las soluciones que obtienes.

b) $4\, sen^2 x + sen\, x\, cos\, x - 3\, cos^2 x = 0$

☛ *Divide por $cos^2 x$ y obtendrás una ecuación con $tg\, x$.*

c) $cos^2 \dfrac{x}{2} + cos\, x - \dfrac{1}{2} = 0$

d) $tg^2 \dfrac{x}{2} + 1 = cos\, x$

e) $2\, sen^2 \dfrac{x}{2} + cos\, 2x = 0$

Identidades trigonométricas

22 Demuestra que:

$$\frac{sen\,(\alpha + \beta)}{sen\,(\alpha - \beta)} = \frac{tg\, \alpha + tg\, \beta}{tg\, \alpha - tg\, \beta}$$

☛ *Aplica las fórmulas de $sen\,(\alpha + \beta)$ y $sen\,(\alpha - \beta)$.*

Divide el numerador y el denominador por $cos\, \alpha\, cos\, \beta$ y simplifica.

23 Prueba que $2\, tg\, x\, cos^2 \dfrac{x}{2} - sen\, x = tg\, x$.

☛ *Sustituye $cos^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1 + cos\, x}{2}$.*

24 Demuestra que:

$$cos \left(x + \frac{\pi}{3}\right) - cos \left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = cos\, x$$

☛ *Desarrolla y sustituye las razones de $\dfrac{\pi}{3}$ y $\dfrac{2\pi}{3}$.*

25 Demuestra que:

$$cos\, \alpha\, cos\,(\alpha - \beta) + sen\, \alpha\, sen\,(\alpha - \beta) = cos\, \beta$$

☛ *Aplica las fórmulas de la diferencia de ángulos, simplifica y extrae factor común.*

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA RESOLVER

26 En una circunferencia de 16 cm de radio, un arco mide 20 cm.

Halla el ángulo central en grados y en radianes.

27 En una determinada circunferencia, a un arco de 12 cm de longitud le corresponde un ángulo de 2,5 radianes.

¿Cuál es el radio de esa circunferencia?

28 Halla, en radianes, el ángulo comprendido entre 0 y 2π tal que sus razones trigonométricas coincidan con las de $\frac{11\pi}{4}$.

29 Demuestra:

$$\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{1+tg\,\alpha\,tg\,\beta}{1-tg\,\alpha\,tg\,\beta}$$

30 Simplifica la expresión:

$$\frac{sen\,2\alpha}{1-\cos^2\alpha}$$

Calcula su valor para $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

31 Prueba que:

$$\frac{2sen\,\alpha-sen\,2\alpha}{2sen\,\alpha+sen\,2\alpha}=tg^2\,\frac{\alpha}{2}$$

32 Simplifica:

$$\frac{2\cos(45°+\alpha)\cos(45°-\alpha)}{\cos 2\alpha}$$

☛ *Al desarrollar el numerador obtendrás una diferencia de cuadrados.*

33 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\cos 2x+3\,sen\,x=2$

b) $tg\,2x\cdot tg\,x=1$

c) $\cos x\cos 2x+2\cos^2 x=0$

d) $2\,sen\,x=tg\,2x$

e) $\sqrt{3}\,sen\,\frac{x}{2}+\cos x-1=0$

f) $sen\,2x\cos x=6\,sen^3 x$

g) $tg\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+tg\,x=1$

34 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $sen\,3x-sen\,x=\cos 2x$

b) $\frac{sen\,5x+sen\,3x}{\cos x+\cos 3x}=1$

c) $\frac{sen\,3x+sen\,x}{\cos 3x+\cos x}=\sqrt{3}$

d) $sen\,3x-\cos 3x=sen\,x-\cos x$

☛ *Transforma las sumas o diferencias de senos y cosenos en productos.*

35 a) Demuestra que:

$$sen\,3x=3\,sen\,x\cos^2 x-sen^3 x$$

b) Resuelve la ecuación $sen\,3x-2\,sen\,x=0$.

☛ *a) Haz $sen\,3x=sen\,(2x+x)$ y desarrolla.*

b) Sustituye $sen\,3x$ por el resultado anterior.

36 Demuestra las siguientes igualdades:

a) $\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-sen^2\beta$

b) $sen^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-sen^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=sen\,\alpha\cdot sen\,\beta$

c) $\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)-\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=sen\,\alpha\cdot sen\,\beta$

37 Simplifica: $sen\,\alpha\cdot\cos 2\alpha-\cos\alpha\cdot sen\,2\alpha$

38 Resuelve los sistemas siguientes dando las soluciones correspondientes al primer cuadrante:

a) $\begin{cases}x+y=120°\\ sen\,x-sen\,y=\frac{1}{2}\end{cases}$

b) $\begin{cases}sen^2 x+\cos^2 y=1\\ \cos^2 x-sen^2 y=1\end{cases}$

☛ *Haz $\cos^2 y=1-sen^2 y$ y $\cos^2 x=1-sen^2 x$.*

c) $\begin{cases}sen\,x+\cos y=1\\ x+y=90°\end{cases}$

39 Justifica que para cualquier ángulo α se verifica:

$$\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=sen\,\alpha+\cos\alpha$$

40 Expresa $sen\,4\alpha$ y $\cos 4\alpha$ en función de $sen\,\alpha$ y $\cos\alpha$.

CUESTIONES TEÓRICAS

41 ¿Qué relación existe entre las razones trigonométricas de los ángulos que miden $\pi/5$ y $4\pi/5$ radianes?

42 Relaciona estas expresiones con las razones trigonométricas del ángulo α:

a) $sen\ (\pi - \alpha)$; $cos\ (\pi - \alpha)$; $tg\ (\pi - \alpha)$

b) $sen\ (\pi + \alpha)$; $cos\ (\pi + \alpha)$; $tg\ (\pi + \alpha)$

c) $sen\ (2\pi - \alpha)$; $cos\ (2\pi - \alpha)$; $tg\ (2\pi - \alpha)$

43 Expresa $A(x)$ en función de $sen\ x$ y $cos\ x$:

a) $A(x) = sen\ (-x) - sen\ (\pi - x)$

b) $A(x) = cos\ (-x) + cos\ (\pi + x)$

c) $A(x) = sen\ (\pi + x) + cos\ (2\pi - x)$

44 Haz, con la calculadora, una tabla de valores de la función $y = cos\ 2x$, dando a x valores comprendidos entre 0 y 2π radianes y represéntala gráficamente.

PARA PROFUNDIZAR

45 Representa las funciones:

a) $y = cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ b) $y = sen\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

c) $y = cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$ d) $y = sen\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$

46 Resuelve los sistemas siguientes dando las soluciones correspondientes al primer cuadrante:

a) $\begin{cases} sen\ x + sen\ y = \sqrt{3} \\ cos\ x + cos\ y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} sen^2\ x + cos^2\ y = 3/4 \\ cos^2\ x - sen^2\ y = 1/4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} cos\ (x + y) = 1/2 \\ sen\ (x - y) = 1/2 \end{cases}$

47 Demuestra que: a) $sen\ x = \dfrac{2\ tg\ x/2}{1 + tg^2\ x/2}$

b) $cos\ x = \dfrac{1 - tg^2\ x/2}{1 + tg^2\ x/2}$ c) $tg\ x = \dfrac{2\ tg\ x/2}{1 - tg^2\ x/2}$

AUTOEVALUACIÓN

1. Expresa en grados: $\dfrac{3\pi}{4}$ rad, $\dfrac{5\pi}{2}$ rad, 2 rad.

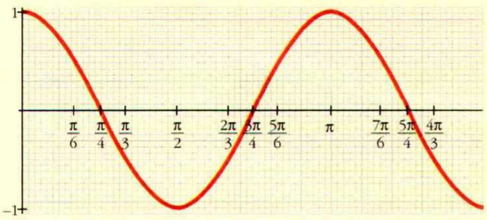
2. Expresa en radianes dando el resultado en función de π y como número decimal:

a) 60° b) 225° c) 330°

3. En una circunferencia de 16 cm de diámetro dibujamos un ángulo de 3 rad. ¿Qué longitud tendrá el arco correspondiente?

4. Asocia a esta gráfica una de las siguientes expresiones y di cuál es su periodo:

a) $y = cos\ x$ b) $y = cos\ 2x$ c) $y = 2cos\ x$



Completa estos puntos para que pertenezcan a la gráfica: $(5\pi/6, ...)$, $(4\pi/3, ...)$, $(-\pi/4, ...)$.

5. Si $cos\ \alpha = -\dfrac{1}{4}$ y $\alpha < \pi$, halla:

a) $sen\ 2\alpha$; b) $cos\ (\pi + \alpha)$; c) $tg\ \dfrac{\alpha}{2}$; d) $sen\left(\dfrac{\pi}{6} - \alpha\right)$

6. Demuestra cada una de estas igualdades:

a) $tg\ 2\alpha = \dfrac{2\ tg\ \alpha}{1 - tg^2\ \alpha}$

b) $sen\ (\alpha + \beta) \cdot sen\ (\alpha - \beta) = sen^2\ \alpha - sen^2\ \beta$

7. Resuelve:

a) $cos\ 2x - cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = 1$

b) $2tg\ x\ cos^2\ \dfrac{x}{2} - sen\ x = 1$

8. Simplifica:

a) $\dfrac{sen\ 60° + sen\ 30°}{cos\ 60° + cos\ 30°}$ b) $\dfrac{sen^2\ \alpha}{1 - cos\ \alpha}\left(1 + tg^2\ \dfrac{\alpha}{2}\right)$

4. En tu CD puedes encontrar las resoluciones de todos estos ejercicios.